

1-2+

ISSN 0233-9293. VIBROTECHNIKA: Aukštųjų mokyklų mokslo darbų rinkinys. 1992. 67. 1-244.

1992
67
mokslo darbų

Vibrotechnika

67 1992

5235

7. ЛОИЦЯНСКИЙ Л. Г., ЛУРЬЕ А. И. Курс теоретической механики. Динамика. М.: Гостехтеориздат, 1954. Т. 2. 596 с.
8. ЛУРЬЕ А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
9. ПРОЧНОСТЬ, устойчивость, колебания. Справочник в 3 томах / Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. Т. 3. 568 с.
10. РЫЖИК И. М., ГРАДШТЕЙН И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 3-е. М.: Гостехтеориздат, 1951. 464 с.
11. Физический энциклопедический словарь. М.: Сов. энциклопедия, 1960. Т. 1. 664 с.
12. ЯВОРСКИЙ Б. М., ДЕТЛАФ А. А. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов. 2-е изд. М.: Наука, 1964. 844 с.

Донецкий политехнический
институт

Поступило
20.07.1989

УДК 534:62-50

РАСЧЕТ МНОГОПЕРИОДНЫХ ПЕРЕХОДНЫХ И УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С СУЩЕСТВЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Р. БАРАУСКАС

Применение метода усреднения. Рассмотрим матричные дифференциальные уравнения упругой механической системы в виде

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = W(U, \dot{U}) + R(t), \quad (1)$$

где $M_{n \times n}$, $C_{n \times n}$, $K_{n \times n}$ — матрицы масс, демпфирования и жесткости, $U_{n \times 1}$, $R_{n \times 1}$ — векторы узловых перемещений и усилий, $W_{n \times 1}$ — вектор нелинейных сил. Возбуждение примем периодическим в виде $R(t) = R(t+T)$. Перемещения и силы представим в виде ограниченных рядов Фурье в виде

$$U(t) \simeq \sum_{k=1}^p U_c^k \cos(k-1)\omega t + U_s^k \sin(k-1)\omega t, \quad (2a)$$

$$R(t) \simeq \sum_{k=1}^p R_c^k \cos(k-1)\omega t + R_s^k \sin(k-1)\omega t, \quad (2b) \quad (2)$$

$$W(t) \simeq \sum_{k=1}^p W_c^k \cos(k-1)\omega t + W_s^k \sin(k-1)\omega t, \quad (2b) \quad (2b)$$

где по определению $U_s^1 = R_s^1 = W_s^1 = 0$, а $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Используя метод усреднения [1], будем рассматривать амплитуды U_c^k , U_s^k , $k=1, p$, в виде функций времени. Кроме того, потребуем, чтобы выражения скоростей имели ту же форму, что и в случае постоянных амплитуд, т. е.

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) = & \sum_{k=1}^p -U_c^k (k-1)\omega \sin(k-1)\omega t + \\ & + U_s^k (k-1)\omega \cos(k-1)\omega t, \end{aligned} \quad (3)$$

Так как в действительности U_c^k , U_s^k зависят от времени и это обстоятельство должно учитываться при дифференцировании, вид выражения (3) предполагает выполнение равенств

$$\dot{U}_c^k \cos(k-1)\omega t + \dot{U}_s^k \sin(k-1)\omega t = 0 \quad (4)$$

для всех $k=\overline{1, p}$. Дифференцируя выражение (3), получим

$$\begin{aligned} \ddot{U}(t) = \sum_{k=1}^p [-U_c^k(k-1)^2\omega^2 \cos(k-1)\omega t - \\ - U_s^k(k-1)^2\omega^2 \sin(k-1)\omega t - \dot{U}_c^k(k-1)\omega \sin(k-1)\omega t + \\ + \dot{U}_s^k(k-1)\omega \cos(k-1)\omega t]. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя (2), (3), (4), (5) в (1), выполнив преобразования и усредняя на промежутке $[0, T]$, для каждого $k=\overline{1, p}$ получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} 2M(k-1)\omega \dot{U}_c^k = -C(k-1)\omega U_c^k + \\ + (K - \omega^2(k-1)^2 M) U_s^k - W_s^k - R_s^k, \\ 2M(k-1)\omega \dot{U}_s^k = (-K + \omega^2(k-1)^2 M) U_c^k - \\ - C(k-1)\omega U_s^k + W_c^k + R_c^k. \end{cases} \quad (6)$$

В матричном виде (6) записывается

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & & & \\ \hline 2\omega M & 0 & & & \\ 0 & 0 & 2\omega M & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 2(p-1)\omega M & 0 \\ & & & & 0 & 2(p-1)\omega M \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_c^0 \\ U_c^1 \\ U_s^1 \\ \vdots \\ U_c^p \\ U_s^p \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -K & 0 & 0 & & \\ \hline 0 & -\omega C & K - \omega^2 M & & \\ 0 & -K + \omega^2 M & -\omega C & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & -\omega(p-1)C & K - \omega^2(p-1)^2 M \\ & & & & -K + \omega^2(p-1)^2 M & -\omega(p-1)C \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} U_c^0 \\ U_c^1 \\ U_s^1 \\ \vdots \\ U_c^p \\ U_s^p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_c^0 \\ -W_s^1 \\ W_c^1 \\ \vdots \\ -W_s^p \\ W_c^p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_c^0 \\ -R_s^1 \\ R_c^1 \\ \vdots \\ -R_s^p \\ R_c^p \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Матрицы системы (7) блочно-диагональные. В случае отсутствия нелинейностей ($W \equiv 0$) система (7) распадается на k независимых подсистем вида (6), каждая из которых позволяет определить амплитуды соответствующих гармоник колебаний. Если $W \neq 0$, уравнения связаны и в общем случае необходимо решать систему (7) размерностью $(2p-1)n \times (2p-1)n$. Здесь, как и в работе [2], в случае локальных нелинейностей можно представить матрицы и векторы в блочном виде, причем блоки должны соответствовать линейной и нелинейной частям системы соответственно. Обращение матриц, соответствующих линейной части, осуществляется в качестве начальной операции, и на каждом шаге интегрирования решается система алгебраических уравнений размерностью $(2p-1)n_2 \times (2p-1)n_2$, где n_2 — число нелинейных степеней свободы. Если нелинейности существенные, решение этого нелинейного уравнения методом простой итерации редко приводит к сходящейся последовательности приближений. Применяя метод Ньютона—Рафсона, на каждом шаге интегрирования приходится определять матрицу производных

$$\frac{\partial W_A}{\partial U_A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial W_c^0}{\partial U_c^0} & \frac{\partial W_c^0}{\partial U_c^1} & \frac{\partial W_c^0}{\partial U_s^1} & \cdots & \frac{\partial W_c^0}{\partial U_c^p} & \frac{\partial W_c^0}{\partial U_s^p} \\ -\frac{\partial W_s^1}{\partial U_c^0} & -\frac{\partial W_s^1}{\partial U_c^1} & -\frac{\partial W_s^1}{\partial U_s^1} & \cdots & -\frac{\partial W_s^1}{\partial U_c^p} & -\frac{\partial W_s^1}{\partial U_s^p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\partial W_s^p}{\partial U_c^0} & -\frac{\partial W_s^p}{\partial U_c^1} & -\frac{\partial W_s^p}{\partial U_s^1} & \cdots & -\frac{\partial W_s^p}{\partial U_c^p} & -\frac{\partial W_s^p}{\partial U_s^p} \\ \frac{\partial W_c^p}{\partial U_c^0} & \frac{\partial W_c^p}{\partial U_c^1} & \frac{\partial W_c^p}{\partial U_s^1} & \cdots & \frac{\partial W_c^p}{\partial U_c^p} & \frac{\partial W_c^p}{\partial U_s^p} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Производные функции W по U_c^k , U_s^k определяются по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial U_c^k} &= \frac{\partial W}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial U_c^k} + \frac{\partial W}{\partial \dot{U}} \frac{\partial \dot{U}}{\partial U_c^k} = \frac{\partial W}{\partial U} \cos(k-1)\omega t - \\ &- \frac{\partial W}{\partial \dot{U}} (k-1)\omega \sin(k-1)\omega t, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial W}{\partial U_s} = \frac{\partial W}{\partial U_s^k} \frac{\partial U}{\partial U_s^k} + \frac{\partial W}{\partial \dot{U}} \frac{\partial \dot{U}}{\partial U_s^k} = \frac{\partial W}{\partial U} \sin(k-1)\omega t +$$

$$+ \frac{\partial W}{\partial \dot{U}} (k-1)\omega \cos(k-1)\omega t, \quad k = \overline{1, p}. \quad (9)$$

Поскольку элементами матрицы (8) являются амплитуды гармоник разложений функций (9) в ряд Фурье, для их определения осуществляется дискретное преобразование Фурье над временными зависимостями (9) в течение периода $[0, T]$. Так как это можно эффективно осуществить численно, предлагаемый вариант метода усреднения не требует выполнения каких-либо аналитических преобразований исходной системы (1) для получения усредненной системы.

Случай вырожденной матрицы жесткости. Если матрица жесткости вырождена, т. е. возможны перемещения упругой части системы как жесткого целого, непосредственно решить систему (7) нельзя, так как на первой итерации необходимо обратить матрицу K . Простейшим выходом из положения представляется эквивалентное преобразование матрицы K и нелинейной части W . При этом первое уравнение системы (7) представляется в виде

$$0 = -\hat{K}U_c^0 + \hat{W}_c^0 + R_c^0, \quad (7')$$

где $\hat{K} = K + \max_{i,j} |k_{ij}| \cdot I$, $\hat{W}_c^0 = W_c^0 + \max_{i,j} |k_{ij}| \cdot U_c^0$, при этом матрица K , как правило, не вырождена.

Динамику движения упругой части системы как жесткого целого учитывает представление первого уравнения (7) в виде

$$M\ddot{U}_c^0 + C\dot{U}_c^0 = -KU_c^0 + W_c^0 + R_c^0, \quad (7'')$$

совпадающем с исходным уравнением (1). Чтобы расчет системы методом усреднения дал экономию вычислительного ресурса по сравнению с прямым интегрированием уравнения (1), интегрирование усредненной системы проводится с шагом, существенно превышающим период упругих колебаний механической системы. Поэтому численная схема интегрирования должна быть выбрана безусловно устойчивой.

Определение установившегося режима колебаний. Система уравнений для определения амплитуд установившегося режима колебаний получается, если приравнять к нулю правую сторону уравнения (7). Якобиан, необходимый для решения полученной таким образом нелинейной системы алгебраических уравнений методом Ньютона—Рафсона, определяется по формулам (8), (9), как и в случае решения усредненных дифференциальных уравнений. Если матрица жесткости вырождена, первое уравнение системы заменяется уравнением вида (7').

Примеры численного расчета. 1. Виброударные колебания упругого стержневого вибропреобразователя, прижатого постоянной продольной силой к опоре. Стержневой вибропреобразователь (рис. 1а) используется в конструкциях вибродвигате-

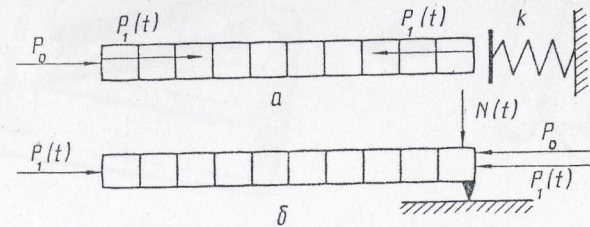


Рис. 1. Конечноеlementная модель вибропреобразователя, совершающего виброударные колебания (а) и конечноеlementная модель вибродвигателя (б)

лей для создания переменной нормальной силы реакции поверхности. Незакрепленный вибропреобразователь имеет преимущества по сравнению с консольно закрепленным, так как в последнем практически невозможно предотвратить утечку колебательной энергии через зону жесткого крепления. Вибропреобразователь длины l представлен конечноеlementной моделью, сила прижатия равна P_0 , амплитуда силы продольного возбуждения равна P_1 , закон возбуждения гармонический $P_1(t) = P_1 \sin \omega t$. Результаты представлены в безразмерных величинах $\bar{t} = t \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $\bar{U} = \frac{U}{l}$,

$$\bar{\ddot{U}} = \ddot{U} \sqrt{\frac{\rho}{E}}, \quad \bar{k} = \frac{k}{EI}, \quad \bar{P} = P/E, \quad \bar{\omega} = \omega l \sqrt{\rho/E},$$

где E, ρ — модуль Юнга и плотность материала соответственно.

Безразмерный импульс контактных усилий равен $\bar{S} = S/EFl \sqrt{\frac{\rho}{E}}$, добротность вибропреобразователя равна $Q=50$. На рис. 2, 3 для сравнения приводятся временные зависимости колебаний правого конца стержня, полученные прямым интегрированием уравнений динамики, и временные зависимости величин амплитуд, полученные интегрируя усредненную систему. Частота возбуждения берется резонансная, $\bar{\omega}=1,02$, число конечных элементов модели равно 1 (двухмассовая система, рис. 2) и равно 10 (рис. 3). Для двухмассовой системы усреднение в первом приближении ($p=2$) дает хорошие результаты. Этого нельзя сказать о модели с 10 степенями свободы, где результаты первого приближения лишь качественно отражают динамическое поведение. Однако уже при третьем приближении ($p=4$) наблюдается и количественное совпадение (рис. 3г). Переходные процессы изменения амплитуд колебаний, полученные по усредненным уравнениям при различных частотах возбуждения,

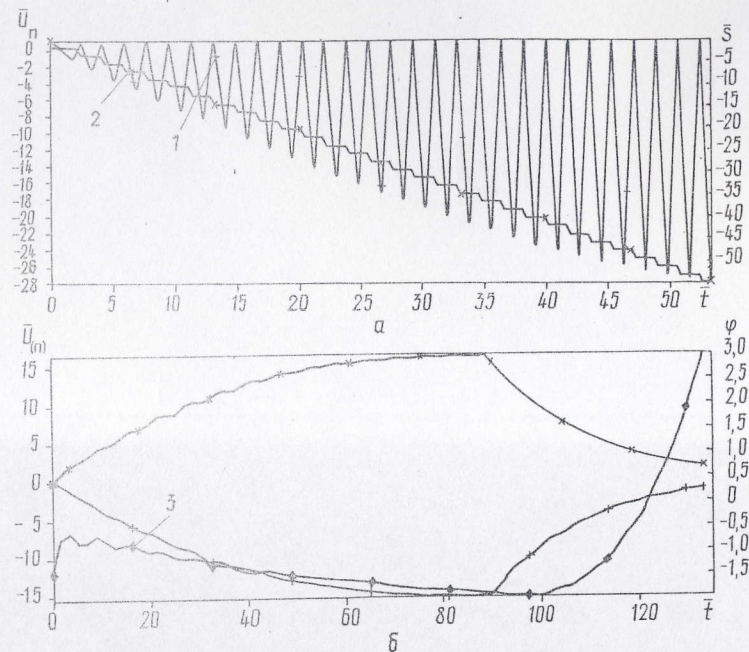


Рис. 2. Переходные процессы виброударных колебаний, число КЭ 1, $\bar{P}_0 = \bar{P}_1 = 1$, $\bar{\omega} = 1,02$. Возбуждение в течение 90 периодов, после — свободные колебания: а — прямое интегрирование уравнений динамики, временные зависимости перемещений контактной точки и импульса сил нормальной реакции, 2400 точек интегрирования; б — интегрирование усредненных уравнений первого приближения, $p=2$, 75 точек интегрирования, временные зависимости амплитуд и фаз колебаний контактной точки:

$$1 - \bar{U}_0^0; 2 - \bar{U}^1 = \sqrt{(\bar{U}_0^0)^2 + (\bar{U}_1^1)^2}; 3 - \varphi^1 = \arctg \frac{\bar{U}_1^1}{\bar{U}_0^0}.$$

показаны на рис. 4. На рис. 5 приведены амплитудно- и фазо-частотные характеристики при различных значениях усилия натяга P_0 . Характерной особенностью является сдвиг резонансных частот вправо и неодинаковая крутизна склонов характеристики. При этом пологим является правый склон, и на нем возможна устойчивая работа вибропреобразователя. Кривые 1 и 4 показывают различие, получаемое при моделировании системы с 1 конечным элементом и с 10 конечными элементами.

2. Исследование установившегося режима движения вибро-двигателя. Модель рассматриваемого вибродвигателя представляет собой стержневой вибропреобразователь, совершающий продольные колебания и имеющий точку фрикционного контакта с плоскостью на правом конце (рис 1б). Величина силы нормального взаимодействия изменяется с частотой, равной частоте продольных колебаний в виде $N(t) = (1 + \sin \omega t)N$. Так как продольные колебания, возбуждаемые силой $P_1(t) = P_1 \sin \omega t$,

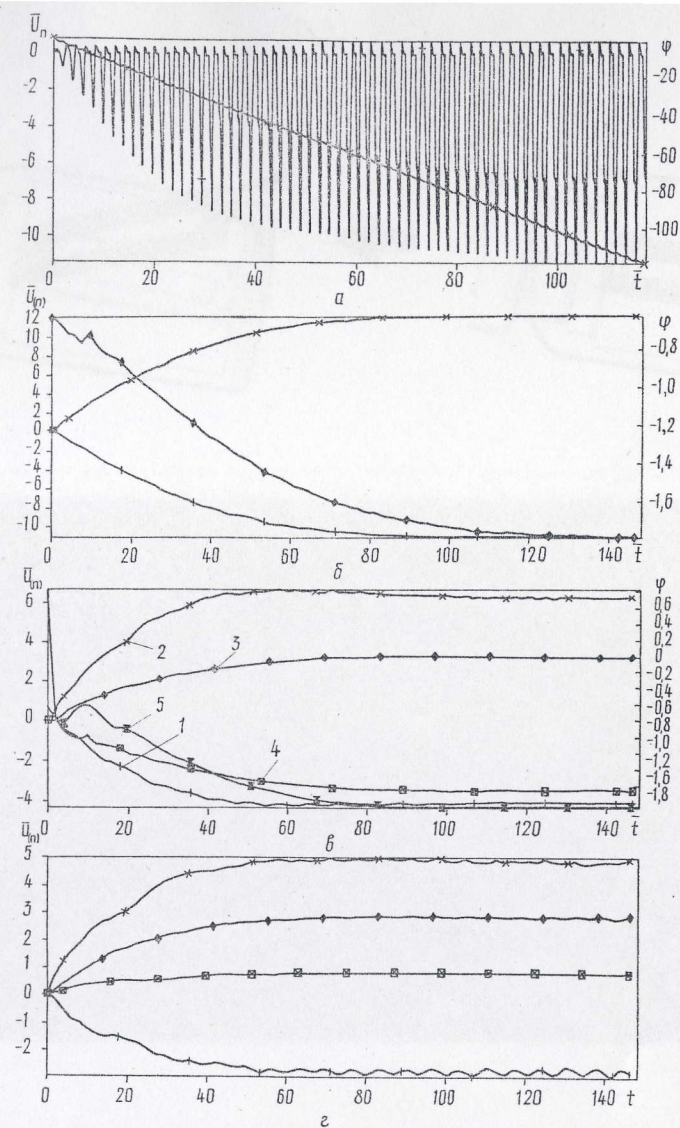


Рис. 3. Переходные процессы виброударных колебаний, число КЭ 10, $\bar{P}_0 = \bar{P}_1 = 1$, $\bar{\omega} = 1,02$: а — прямое интегрирование уравнений динамики, временные зависимости перемещений контактной точки и импульса сил нормальной реакции, 2400 точек интегрирования; б — интегрирование усредненных уравнений первого приближения, $p=2$, 75 точек интегрирования, временные зависимости амплитуд и фаз колебаний контактной точки: 1 — $\bar{U}_0^0$; 2 — $\bar{U}^1$; 3 — φ^1 ; в — интегрирование усредненных уравнений второго приближения, $p=3$, 75 точек интегрирования, временные зависимости амплитуд и фаз колебаний контактной точки: 1 — $\bar{U}_0^0$; 2 — $\bar{U}^1$; 3 — $\bar{U}^2$; 4 — φ^1 ; 5 — φ^2 ; г — интегрирование усредненных уравнений третьего приближения, $p=4$, 75 точек интегрирования, временные зависимости амплитуд колебаний контактной точки: 1 — $\bar{U}_0^0$; 2 — $\bar{U}^1$; 3 — $\bar{U}^2$; 4 — $\bar{U}^3$

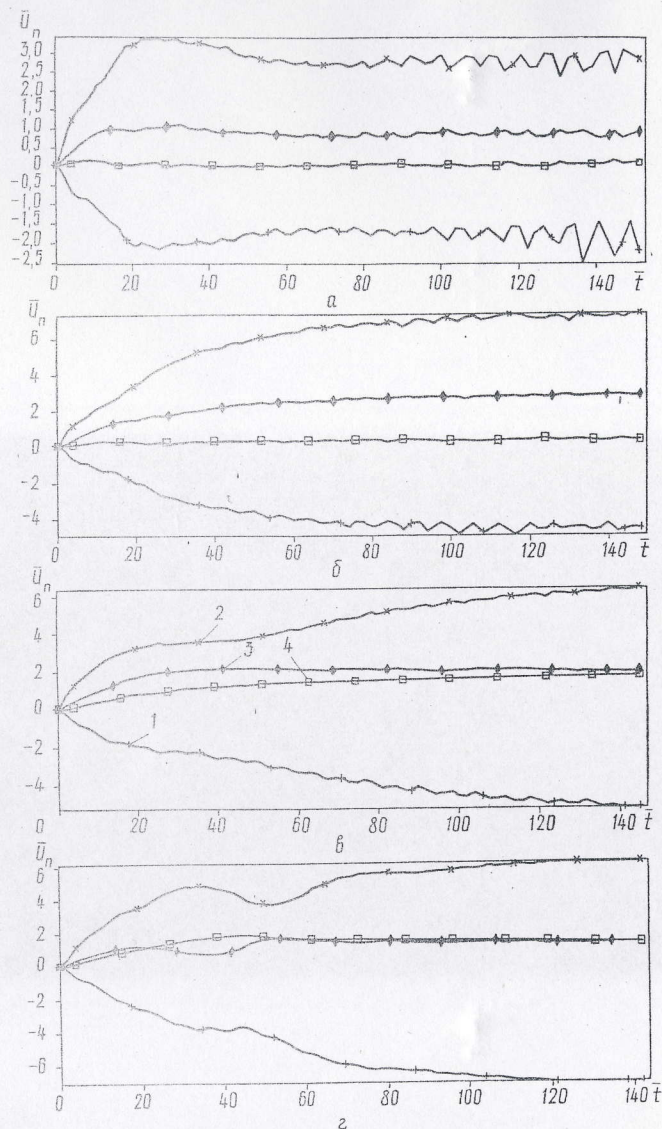


Рис. 4. Переходные процессы изменения амплитуд колебаний при различных частотах возбуждения, число КЭ 10, $P_0 = P_1 = 1$, число точек интегрирования 75, $p = 4$ (третье приближение): 1 — $\bar{U}^0$; 2 — $\bar{U}^1$; 3 — $\bar{U}^2$; 4 — $\bar{U}^3$; а — $\bar{\omega} = 0,99$; б — $\bar{\omega} = 1,01$; в — $\bar{\omega} = 1,03$; г — $\bar{\omega} = 1,05$

резонансные, между гармоническими законами продольных колебаний и изменениями нормальной силы создается разность фаз $\pi/2$, которая оптимально передает направленное среднее движущее усилие, вследствие чего происходит движение упру-

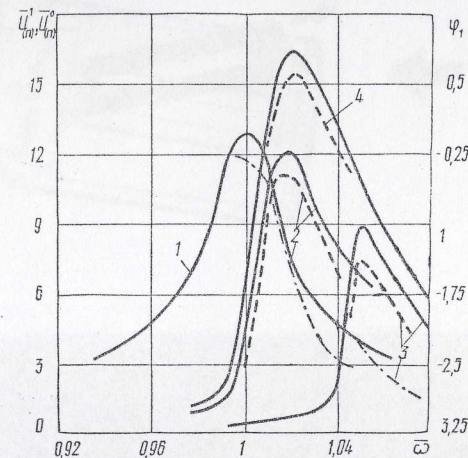


Рис. 5. АЧХ и ФЧХ колебаний контактной точки вибропреобразователя: 1 — бесконтактные колебания; 2 — $P_0 = 1$, $p = 2$, $\bar{k} = 10$, число КЭ 10; 3 — $P_0 = 1,5$, $p = 2$, $\bar{k} = 10$, число КЭ 10; 4 — $P_0 = 1$, $p = 2$, $\bar{k} = 10$, число КЭ 1; сплошная и пунктирная линии — соответственно амплитуды $\bar{U}^1$ и $\bar{U}^0$, штрихпунктирные — фаза φ^1

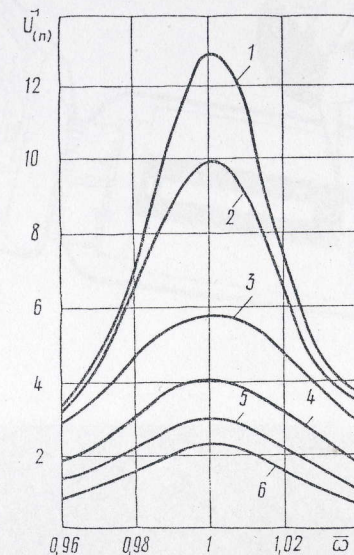


Рис. 6. АЧХ колебаний контактной точки вибродвигателя при различных значениях средней нормальной силы: 1 — $\bar{N} = 0$ (бесконтактные колебания); 2 — $\bar{N} = 1$; 3 — $\bar{N} = 3$; 4 — $\bar{N} = 5$; 5 — $\bar{N} = 7$; 6 — $\bar{N} = 9$

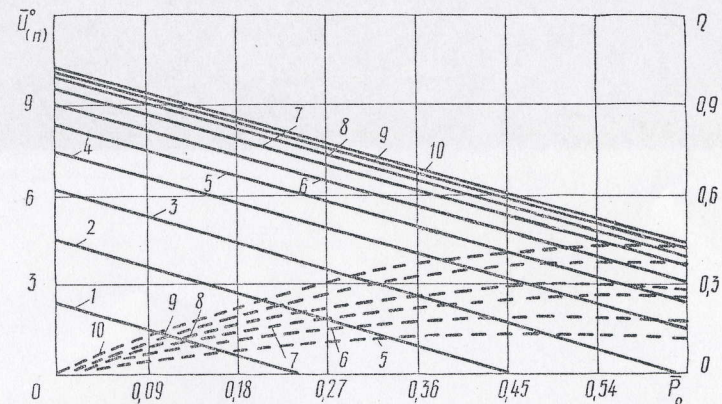


Рис. 7. Характеристики движущая сила—скорость (сплошная линия) и зависимости кпд от движущей силы (пунктирная линия) при различных значениях средней нормальной силы: 1 — $\bar{N} = 1$; 2 — $\bar{N} = 2$; 3 — $\bar{N} = 3$; 4 — $\bar{N} = 4$; 5 — $\bar{N} = 5$; 6 — $\bar{N} = 6$; 7 — $\bar{N} = 7$; 8 — $\bar{N} = 8$; 9 — $\bar{N} = 9$; 10 — $\bar{N} = 10$

гого вибропреобразователя как жесткого целого. Скачкообразная характеристика сухого трения $W_{(n)} = N(t) \operatorname{sign} \dot{U}_{(n)}$ аппроксимируется в виде $W_{(n)} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \alpha \dot{U}_{(n)}$, где $\dot{U}_{(n)}$ обозначает скорость правой (т. е. n -й) точки вибропреобразователя. На рис. 6, 7 приведены результаты расчета установившегося режима движения вибродвигателя по усредненным уравнениям первого приближения ($p=2$), при этом конечноэлементная модель состоит из 10 конечных элементов. На рис. 6 приведены амплитудно-частотные характеристики колебаний контактной точки вибропреобразователя (амплитуда первой гармоники $\bar{U}_{(n)}^1$) при различных значениях средней величины нормальной силы N . Сдвига резонансных частот здесь не наблюдается при любом значении N , однако от значения N существенно зависит амплитуда колебаний. На рис. 7 приведены характеристики движущая сила—скорость, где движущая сила принимается равной величине тормозящего усилия P_0 при постоянной средней скорости движения вибропреобразователя как жесткого целого. В качестве средней скорости рассматривается скорость изменения амплитуды нулевой гармоники $U_{(n)}^0$. Безразмерные величины определяются по формулам, приведенным выше при описании первого примера. Пунктирными линиями на рис. 7 показаны зависимости коэффициента полезного действия (к.п.д.) от внешней движущей силы. К.п.д. здесь оценивает эффективность передачи колебательной энергии в направленное движение и определяется по формуле

$$\eta = \left| \frac{A_n}{A_{\text{возб.}}} \right|,$$

где A_n — полезная работа, $A_{\text{возб.}}$ — работа сил возбуждения. Расчетная формула для к.п.д. по уравнениям первого приближения имеет вид

$$\eta = \left| \frac{2 \cdot P_0 \cdot U_{(1)}^0}{P_1 (U_{s(1)}^1 - U_{s(n)}^1)} \right|.$$

Выводы. Для расчета вынужденных многопериодных режимов колебаний предложена численная версия метода усреднения. Вместо прямого интегрирования уравнений динамики интегрируются усредненные уравнения, причем преобразование уравнений осуществляется автоматически, используя численное преобразование Фурье. Исследована динамика упругого вибропреобразователя, совершающего высокочастотные продольные колебания в виброударном режиме и режиме работы в качестве входного—выходного звена вибродвигателя. Показано, что при исследовании двухмассовой системы в качестве модели вибропреобразователя решение усредненного уравнения по первому приближению хорошо соответствует эталонному решению, полученному численным интегрированием урав-

нений динамики системы. Если вибропреобразователь представлен в виде конечноэлементной модели, первое приближение позволяет лишь качественно оценить переходный процесс в вид стационарных колебаний. Для получения количественно правильных результатов необходимо брать третье приближение.

Список использованной литературы

1. ГРЕБЕННИКОВ Е. А. Метод усреднения в прикладных задачах. М.: Наука, 1986. 256 с.
2. БАРАУСКАС Р. А. Прямое численное интегрирование уравнений динамики упругих механических систем с односторонними кинематическими ограничениями. II. Расчет систем с парами прямого удара // Вибротехника. 1990. № 2(66).

Каунасский технологический университет

Поступило
02.11.1989